フォームの解答はこちらから↓↓↓↓

20XX 年度

第 1 回　全島統一うさぎテスト

線形代数・前編

［80 分 / 100 点］

試験が始まるまで、以下の注意事項、次のページの解答上の注意を読みなさい。

［**注意事項**］

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 試験監督はいない。**自分自身が解答者とともに監督となる**のだ。必要なら友達や恋人を監督にしてもよい。
3. 問題用紙は、表紙を入れずに全部で **12 ページ**である。
（1 ページ目は回答方法に関する注意事項が書かれている。必ず読むこと。）
4. 問題は、すべてフォーム形式にて回答を行う。フォームに入力する際の回答の注意は次のページにある。
5. 試験開始前にフォームに「名前」などを入力すること。名前はペンネームでよいが、**解答問い合わせの際に必須**なので必ず自分自身で控えておくこと。
6. 問題 1〜問題 10 まですべて必答問題で、回答番号は $\boxed{1}$〜$\boxed{50}$ です。
7. 万が一、誤字が発見された場合、問題作成主に報告してくれたら幸いです。
8. 解説は「工業大学生ももやまのうさぎ塾」の記事内にあるので、解き終わったら復習用にご覧いただけたら幸いです。
9. 勉強は期末試験 3 日前くらいからはしてください。くれぐれも前日に漢字 2 文字で呼ばれる某エナジードリンクを飲みながら一夜漬けすることのないように…。

［**フォーム解答における注意**］

1. 最初のページで、受験番号、名前（ペンネーム OK）、性別、学年情報を入れること。**性別は別に本当の性別でなくてよい。**ここまでは試験開始前に行ってよい。

2. 特に問題上における指示がない場合、空欄は、**-9 以上 9 以下の整数**が入る。例を示すので参考にすること。指示がある場合、指示に従うこと。

例 1. 3 – 5 = $\boxed{10}$ ← 答えは -2 なので、**No.10** には **-2** を入力。

例 2. ①～④の中から、一番速い乗り物を 1 つ選びなさい。回答番号：$\boxed{11}$

① 新幹線　② バス　③ 飛行機　④ 人間

↑答えは③なので **No.11** には **3** を入力。

3. 行列、ベクトルについて解答する場合、**番号が書かれている成分についてのみ**解答すること。例えば、下の例の場合、**No.12** には **-3** を、**No.13** には **0** を入力すること。

$$[\text{問題}]\ A = \begin{pmatrix} [\ \mathbf{12}\ ] & [\quad] \\ [\quad] & [\ \mathbf{13}\ ] \end{pmatrix} \qquad [\text{正解}]\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. フォームの解答用紙は 1 ページ目右上の QR コードにあります。
QR コードがダメな人はこちらの URL を手打ち！ → https://bit.ly/3yIipqN

［**数学上における注意**］

1. 特に指示がない場合、行列、ベクトルの成分はすべて実数である。
2. 特に指示がない場合、小文字の太字（例: $\boldsymbol{a}$）は縦ベクトルを表す。
3. 特に指示がない場合、E は単位行列、O は零行列を表す。
4. $\mathbf{0}$（太文字の 0）は零ベクトルを表す。
5. ${}^tA$ は行列 A の転置行列を表す。

問題 1.［小問集合］（配点　10）　［ マーク番号 $\boxed{1}$〜$\boxed{10}$ ］

（1）次の行列

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\\0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&0&4\\-1&0&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&5&2\\-2&3&5\\0&1&4\end{pmatrix}$$

について、以下の(i), (ii)の問いに答えなさい。

(i)　次の（ア)〜(エ）のうち、計算が定義される式は何個あるか。個数を回答欄に入力しなさい。（例：正しい文章が 2 つ → 2 と回答）　回答番号：$\boxed{1}$

（ア）$A+D$

（イ）$B+C$

（ウ）AD

（エ）BC

(ii) ${}^tB\,{}^tC$ の計算結果は何行何列になるか。正しいものを①〜④の中から 1 つえらびなさい。回答番号：$\boxed{2}$

①　2 行 2 列　　②　2 行 3 列　　③　3 行 2 列　　④　3 行 3 列

（2）ある行列 A が逆行列 A^{-1} を持つための必要十分条件として適切なものを①〜④から 1 つ、⑤〜⑧から 1 つ選び、それぞれ回答欄に入力しなさい。

（①〜④の回答番号：$\boxed{3}$・⑤〜⑧の回答番号：$\boxed{4}$）

①　$\mathrm{Rank}\,A=1$　　②　$\mathrm{Rank}\,A\neq 1$　　③　$\mathrm{Rank}\,A=n$　　④　$\mathrm{Rank}\,A\neq n$

⑤　$|A|=0$　　⑥　$|A|\neq 0$　　⑦　$|A|>0$　　⑧　$|A|<0$

（3）m 行 n 列の係数行列 A、n 次元ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}$ からなる連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ について、以下の(i)-(iii)の問いに答えなさい。

(i) ある連立方程式が解を持つとする。このときの係数行列 A と拡大係数行列 $B=(A|\boldsymbol{b})$ に成り立つ行列の階数の関係として正しいものを①〜④の中から 1 つ選び、回答欄に入力しなさい。回答番号：$\boxed{5}$

① $\mathrm{Rank}\,A=\mathrm{Rank}\,B$　　② $\mathrm{Rank}\,A\neq\mathrm{Rank}\,B$

③ $\mathrm{Rank}\,A<\mathrm{Rank}\,B$　　④ $\mathrm{Rank}\,A>\mathrm{Rank}\,B$

（ii）連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ がただ 1 つの解を持つとする。そのときの解 $\boldsymbol{x}$ は逆行列 A^{-1} を用いてどのように計算することができるか。正しいものを①～⑤の中から 1 つ選び、回答欄に入力しなさい。回答番号：$\boxed{6}$

① $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{b}$　② $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$　③ $\boldsymbol{x} = AA^{-1}\boldsymbol{b}$　④ $\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{b}$　⑤ $\boldsymbol{x} = A^2\boldsymbol{b}$

（iii）連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が無数の解を持つとする。このときの係数行列 A の行列の階数にはどのような関係があるか。正しいものを①～④の中から 1 つ選び、回答欄に入力しなさい。回答番号：$\boxed{7}$

① $\mathrm{Rank}\,A = m$　② $\mathrm{Rank}\,A < m$　③ $\mathrm{Rank}\,A = n$　④ $\mathrm{Rank}\,A < n$

（iv）(iii)と同じく連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が無数の解を持つとする。このときの解の自由度 k について成り立つ関係として、正しいものを①～⑤の中から 1 つ選び、回答欄に入力しなさい。ただし、自由度とは連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて表現するために必要な任意定数の個数のことである。回答番号：$\boxed{8}$

① $k = \mathrm{Rank}\,A$　② $k = \mathrm{Rank}\,A - m$　③ $k = \mathrm{Rank}\,A - n$

④ $k = m - \mathrm{Rank}\,A$　⑤ $k = n - \mathrm{Rank}\,A$

（4）次の①～⑧の式の中で必ず成り立つとは言えない関係式、文章を①～④から 1 つ、⑤～⑧から 1 つ選び、それぞれ回答欄に入力しなさい。ただし、行列 A, B はともに n 次正方行列とし、行列 E は n 次単位行列とする。

（①～④の回答番号：$\boxed{9}$・⑤～⑧の回答番号：$\boxed{10}$）

① $A + B = B + A$

② $AB = BA$

③ $|A||B| = |AB|$

④ ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

⑤ $\mathrm{Rank}\,A = n$ のとき、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は無数の解を持つ。

⑥ $AE = EA$

⑦ $|A| = |{}^tA|$

⑧ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

問題２．［行列の演算］（配点　10）　［ **マーク番号**　$\boxed{11}$～$\boxed{20}$ ］

（1）次の行列

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

に対し、以下の(i)～(iii)の演算を行い、計算結果の数値を $\boxed{11}$～$\boxed{20}$ に入力しなさい。ただし、番号が記入されず、空欄になっている成分については回答しなくてよい。（というか回答するな。）

（i）

$$2A+B=\begin{pmatrix}[\ \mathbf{11}\ ] & [\quad] & [\ \mathbf{12}\ ]\\ [\quad] & [\quad] & [\quad]\\ [\ \mathbf{13}\ ] & [\quad] & [\ \mathbf{14}\ ]\end{pmatrix}$$

（ii）

$$AB=\begin{pmatrix}[\ \mathbf{15}\ ] & [\quad] & [\quad]\\ [\ \mathbf{16}\ ] & [\quad] & [\quad]\\ [\ \mathbf{17}\ ] & [\quad] & [\quad]\end{pmatrix}$$

（iii）

$$BA=\begin{pmatrix}[\quad] & [\quad] & [\quad]\\ [\ \mathbf{18}\ ] & [\ \mathbf{19}\ ] & [\ \mathbf{20}\ ]\\ [\quad] & [\quad] & [\quad]\end{pmatrix}$$

問題３．［行列の階数(Lv. 1)］（配点　10）　［ **マーク番号** $\boxed{21}$〜$\boxed{24}$ ］

下の行基本変形は、行列 A の階数を計算するための計算の一部である。次の(1), (2)に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ [\ \mathbf{21}\ ] & -1 & [\ \mathbf{22}\ ] & [\ \mathbf{23}\ ] \end{pmatrix}$$

（1）回答欄 $\boxed{21}$〜$\boxed{23}$ に当てはまる数値を入力しなさい。

（2）行列 A の階数は $\boxed{24}$ となる。（階数を入力しなさい。）

問題４．［行列の階数(Lv. 2)］（配点　10）　［ マーク番号 25 ～ 29 ］

次の(1)～(5)で示された行列の階数を 25 ～ 29 に入力しなさい。

（1）階数：25

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

（2）階数：26

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

（3）階数：27

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2021 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（4）階数：28

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（5）階数：29

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題５．［行列の階数(Lv. 3)］（配点　10）　［ **マーク番号** $\boxed{30}$〜$\boxed{32}$ ］

次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & a \end{pmatrix}$$

の階数は、定数 a の値によって変化する。$\boxed{30}$〜$\boxed{32}$ に当てはまる数値を入力しなさい。

（1）$a = \boxed{30}$ のとき、行列 A の階数は $\boxed{31}$ となる。

（2）$a \neq \boxed{30}$ のとき、行列 A の階数は $\boxed{32}$ となる。

問題６．［逆行列］（配点　10）　［ マーク番号 $\boxed{33}$ ～ $\boxed{37}$ ］

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

（1）

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算すると、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} [\ \mathbf{33}\ ] & [\quad] & [\quad] \\ [\quad] & [\ \mathbf{34}\ ] & [\quad] \\ [\ \mathbf{35}\ ] & [\quad] & [\ \mathbf{36}\ ] \end{pmatrix}$$

となる。

（2）

ある正方行列 B が逆行列を持つとする。このとき、行列 B と逆行列 B^{-1} に対して必ず成り立つ式を①～④から選び、番号を入力しなさい。回答番号：$\boxed{37}$

① $BB^{-1} = O$

② $BB^{-1} = E$

③ $BB^{-1} = B$

④ $BB^{-1} = B^{-1}$

問題7．［連立１次方程式(Lv. 1)］（配点　10）　［ マーク番号 $\boxed{38}$～$\boxed{39}$ ］

次の１次連立方程式

$$\begin{cases} x \phantom{{}-3y} + z = -1 \\ -x - 3y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = -3 \end{cases}$$

を解くと、一般解は任意定数 k を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} [\ \mathbf{38}\ ] \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ [\ \mathbf{39}\ ] \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。

問題８．［連立１次方程式(Lv. 2)］（配点　10）　［ マーク番号 $\boxed{40}$ ～ $\boxed{43}$ ］

次の連立１次方程式

$$\begin{cases} 3x \phantom{{}-y} + z + 3w = -1 \\ 4x - y - z + 4w = -2 \\ -5x + 2y + 3z - 5w = a \end{cases}$$

を考える。次の(1), (2)の問に答えなさい。

（1）$a =$ $\boxed{\mathbf{40}}$ のとき、連立１次方程式は解を持つ。

（2）$a =$ $\boxed{40}$ とする。このときの一般解は任意定数 s, t を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ [\ \mathbf{41}\ ] \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ [\ \mathbf{42}\ ] \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ [\ \mathbf{43}\ ] \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。

問題９．［行列式(Lv. 1)］（配点　10）　［ マーク番号 $\boxed{44}$〜$\boxed{47}$ ］

以下の式は、行列式を計算するために変形を行ったものである。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

$$|A| = \begin{vmatrix} -9 & 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = [\ \mathbf{44}\ ] \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = [\ \mathbf{44}\ ] \cdot [\ \mathbf{45}\ ] \begin{vmatrix} 3 & [\ \mathbf{46}\ ] & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

（1）回答欄 $\boxed{44}$〜$\boxed{46}$ に当てはまる数値を入力しなさい。

（2）行列式 $|A|$ の値は $\boxed{47}$ となる。

問題 10.［行列式(Lv. 2)］（配点　10）　［ マーク番号 $\boxed{48}$〜$\boxed{50}$ ］

次の(1)〜(3)の問いに答えなさい。

（1）次の行列式を計算しなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = [\ \mathbf{48}\ ]$$

（2）次の行列式を計算しなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = [\ \mathbf{49}\ ]$$

（3）行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

の逆行列 A^{-1} の 2 行 3 列成分、つまり

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} [\quad] & [\quad] & [\quad] & [\quad] \\ [\quad] & [\quad] & [\ \mathbf{50}\ ] & [\quad] \\ [\quad] & [\quad] & [\quad] & [\quad] \\ [\quad] & [\quad] & [\quad] & [\quad] \end{pmatrix}$$

の空欄 $\boxed{50}$ に当てはまる数値を答え、入力しなさい。

問題は以上です。お疲れさまでした。

試験本番も頑張りましょう。