

フォームの解答はこちらから↓↓↓↓



20XX 年度

## 第 2 回 全島統一うさぎテスト

解析学・前編

[90 分 / 100 点]

試験が始まるまで、以下の注意事項、次のページの解答上の注意を読みなさい。

### [注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 試験監督はいない。自分自身が解答者とともに監督となるのだ。必要なら友達や恋人を監督にしてもよい。
3. 問題用紙は、表紙を入れずに全部で 12 ページである。  
(1 ページ目は回答方法に関する注意事項が書かれている。必ず読むこと。)
4. 問題は、すべてフォーム形式にて回答を行う。フォームに入力する際の回答の注意は次のページにある。
5. 試験開始前にフォームに「名前」などを入力すること。名前はペンネームでよいが、解答問合わせの際に必須なので必ず自分自身で控えておくこと。
6. 問題 1～問題 10 まですべて必答問題で、回答番号は  ～  です。
7. 万が一、誤字が発見された場合、問題作成主に報告してくれたら幸いです。
8. 解説は「工業大学生ももやまのうさぎ塾」の記事内にあるので、解き終わったら復習用にご覧いただけたら幸いです。今回は微分編と積分編で分けています。
9. 勉強は期末試験 3 日前くらいからはしてください。くれぐれも前日に漢字 2 文字で呼ばれる某エナジードリンクを飲みながら一夜漬けすることのないように…。
10. ★がついている問題は高校数学の知識で解ける問題です。

[フォーム解答における注意]

1. 最初のページで、受験者登録をすること。ここまでは試験開始前に行ってよい。
2. 指示がない限り、解答は指定された選択肢の中から最も適切なものを1つ入力すること。ただし選択の際に2つ以上（最大3つ）の記号・数字が含まれることがあるので注意すること。

例. 式が正しくなるようにしなさい。  $3 - \boxed{10} = 4$

★ <input type="text" value="10"/> ~ <input type="text" value="12"/> の選択肢 ★
① 0    ② 1    ③ 2    ④ 3    ⑤ 4
⊖① -1    ⊖② -2    ⊖③ -3    ⊖④ -4

↑ 正しい選択肢は⊖①なので、フォームには -1 と回答。

※ ちょっと式に違和感がありますが、式を穴埋めする問題では、 $3 - (\boxed{10}) = 4$  のように穴埋めの前後に括弧が入っていると思ってください。

3. ⊖ はマイナスを表す。
4. フォームの解答用紙は1ページ目右上のQRコードにあります。

QRコードがダメな人はこちらのURLを手打ち！ → <https://bit.ly/usamoshi-kaiseki1>

[数学上における注意]

1.  $\log x$  は  $x$  の自然対数、つまり  $\log_e x$  を表す。（ $\ln x$  と表されることもある。）
2.  $\sin^{-1} x$ ,  $\cos^{-1} x$ ,  $\tan^{-1} x$  はそれぞれ  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  の逆関数を表す。（ $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$  と表されることもある。）

問題 1. [★極限] (配点 10) [ マーク番号  ~  ]

次の(1)~(4)の極限を求めなさい。

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \boxed{1}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \log(x+2) - \log x \} = \boxed{2}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \boxed{3}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log(2^x + 4^x) = \boxed{4}$$

★  ~  の選択肢 ★

① 0   ② 1   ③ 2   ④ 3   ⑤ 4   ⑥  $\frac{1}{2}$    ⑦  $\frac{1}{3}$    ⑧  $\frac{1}{4}$    ⑨  $\infty$

⊖① -1   ⊖② -2   ⊖③ -3   ⊖④ -4

⊖⑤  $-\frac{1}{2}$    ⊖⑥  $-\frac{1}{3}$    ⊖⑦  $-\frac{1}{4}$    ⊖⑧  $-\infty$

★  の選択肢 ★

① 0   ②  $\log 2$    ③  $2 \log 2$    ④  $3 \log 2$    ⑤  $4 \log 2$    ⑥  $5 \log 2$    ⑦  $\infty$

問題2. [逆三角関数] (配点 10) [マーク番号  ~  ]

次の(1)~(3)の問いに答えなさい。

(1) 関数  $f(x) = 2 \cos^{-1}(2x - 1)$  について(i), (ii)にある空欄を埋めなさい。

(i)  $f(x)$  の定義域は  となる。

(ii)  $f(x)$  の値域は  となる。

★  の選択肢 ★

①  $-1 \leq x \leq 0$      ②  $0 \leq x \leq 1$      ③  $1 \leq x \leq 2$   
 ④  $-2 \leq x \leq 0$      ⑤  $-1 \leq x \leq 1$      ⑥  $0 \leq x \leq 2$      ⑦ 実数全体

---

★  の選択肢 ★

①  $-\pi \leq f(x) \leq 0$      ②  $0 \leq f(x) \leq \pi$      ③  $\pi \leq f(x) \leq 2\pi$   
 ④  $-\pi < f(x) < 0$      ⑤  $0 < f(x) < \pi$      ⑥  $\pi < f(x) < 2\pi$   
 ⑦  $-2\pi \leq f(x) \leq 0$      ⑧  $-\pi \leq f(x) \leq \pi$      ⑨  $0 \leq f(x) \leq 2\pi$      ⑩ 実数全体

(2) 次の計算をしなさい。

$$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{  }$$

(3) 次の計算をしなさい。

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \text{  }$$

★  ~  の選択肢 ★

① 0     ②  $\frac{\pi}{12}$      ③  $\frac{\pi}{6}$      ④  $\frac{\pi}{4}$      ⑤  $\frac{\pi}{3}$      ⑥  $\frac{\pi}{2}$   
 ⑦  $\frac{2}{3}\pi$      ⑧  $\frac{3}{4}\pi$      ⑨  $\frac{5}{6}\pi$      ⑩  $\frac{11}{12}\pi$      ⑪  $\pi$

⑫  $-\frac{\pi}{12}$      ⑬  $-\frac{\pi}{6}$      ⑭  $-\frac{\pi}{4}$      ⑮  $-\frac{\pi}{3}$      ⑯  $-\frac{\pi}{2}$

⑰  $-\frac{2}{3}\pi$      ⑱  $-\frac{3}{4}\pi$      ⑲  $-\frac{5}{6}\pi$      ⑳  $-\frac{11}{12}\pi$      ㉑  $-\pi$

問題 3. [★微分可能性] (配点 10) [ マーク番号  ~  ]

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 次の(i), (ii)の関数の連続性、微分可能性について述べた文章として、正しいものを選びなさい。

(i) 回答番号:

$$f(x) = x|x|$$

(ii) 回答番号:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

★  ~  の選択肢 ★

- ① 連続かつ微分可能な関数である。
- ② 連続ではあるが微分可能ではない関数である。
- ③ 連続ではないが微分可能である関数である。
- ④ 連続ではないし、微分可能でもない関数である。

(2) 次の関数

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6x + a & (x \geq 1) \\ bx^2 & (x < 1) \end{cases}$$

が  $x = 1$  で微分可能となるように定数  $a, b$  の値を求め、その値を入力しなさい。

回答番号:  $a =$  ,  $b =$

※ 回答の値の範囲は  $-9 \sim 9$  である。

問題4. [関数の微分] (配点 10) [マーク番号  ~  ]

次の(1)~(3)の関数を微分し、導関数を求めなさい。

(1)

$$y = (\sin x)^{\cos x}, \quad \frac{dy}{dx} = \text{13} (\cos x \cdot \text{14} - \sin x \cdot \text{15})$$

(2)

$$y = \sin^{-1}(x^2), \quad \frac{dy}{dx} = \text{16}$$

(3)

$$y = \int_1^{x^2} \frac{t}{t^3 + 1} dt, \quad \frac{dy}{dx} = \text{17}$$

★  ~  の選択肢 ★

- ①  $\sin x$    ②  $\cos x$    ③  $\tan x$    ④  $\frac{1}{\sin x}$    ⑤  $\frac{1}{\cos x}$    ⑥  $\frac{1}{\tan x}$   
 ⑦  $\log(\sin x)$    ⑧  $\log(\cos x)$    ⑨  $(\sin x)^{\cos x}$    ⑩  $(\sin x)^{\cos x - 1}$

★  の選択肢 ★

- ① 0   ②  $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$    ③  $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$    ④  $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}$    ⑤  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$   
 ⑥  $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$    ⑦  $-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}$    ⑧  $\frac{1}{1+x^4}$    ⑨  $\frac{2x}{1+x^4}$    ⑩  $\frac{x^2}{1+x^4}$

★  の選択肢 ★

- ① 0   ②  $\frac{x^2}{x^6+1}$    ③  $\frac{3x^2}{x^6+1}$    ④  $\frac{2x^3}{x^6+1}$   
 ⑤  $\frac{x^4}{(x^6+1)^2}$    ⑥  $\frac{5x^4}{(x^6+1)^2}$    ⑦  $\frac{4x^5}{(x^6+1)^2}$

問題5. [マクローリン展開] (配点 10) [マーク番号  ~

次の関数

$$f(x) = (1-x)e^{2x}$$

をマクローリン展開する。すると、

$$f(x) = 1 + x + \text{} x^2 + \text{} x^3 + \dots$$

となる。・ にあてはまる数値を選択肢から選びなさい。

★  ・  の選択肢 ★

① 0    ② 1    ③ 2    ④ 3    ⑤ 4    ⑥  $\frac{1}{3}$     ⑦  $\frac{1}{2}$     ⑧  $\frac{2}{3}$     ⑨  $\frac{4}{3}$     ⑩  $\frac{3}{2}$

⑪⑫  $\frac{5}{3}$     ⑬⑭  $\frac{7}{3}$     ⑮⑯  $\frac{5}{2}$     ⑰⑱  $\frac{8}{3}$     ⑲⑳  $\frac{10}{3}$     ㉑㉒  $\frac{7}{2}$     ㉓㉔  $\frac{11}{3}$

㉕① -1    ㉕② -2    ㉕③ -3    ㉕④ -4

㉕⑤  $-\frac{1}{3}$     ㉕⑥  $-\frac{1}{2}$     ㉕⑦  $-\frac{2}{3}$     ㉕⑧  $-\frac{4}{3}$     ㉕⑨  $-\frac{3}{2}$

㉕⑪⑫  $-\frac{5}{3}$     ㉕⑬⑭  $-\frac{7}{3}$     ㉕⑮⑯  $-\frac{5}{2}$     ㉕⑰⑱  $-\frac{8}{3}$

㉕⑲⑳  $-\frac{10}{3}$     ㉕㉑㉒  $-\frac{7}{2}$     ㉕㉓㉔  $-\frac{11}{3}$

問題 6. [★グラフの概形] (配点 10) [ マーク番号  ~  ]

次の関数

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

のグラフを考える。次の(1)~(5)の問いに答えなさい。

※ この問題のみ**選択肢が 1 スタート**なので注意！！

(1) グラフの概形について述べたものとして正しいものを 1 つ選びなさい。

回答番号:

- ①  $f(x)$  は区間  $-1 < x < 1$  において単調増加となっている。
- ②  $f(x)$  は区間  $-1 < x < 1$  において単調減少となっている。
- ③  $f(x)$  は区間  $-1 < x < 1$  において単調増加でも単調減少でもない。

(2) 極値について述べたものとして正しいものを 1 つ選びなさい。

回答番号:

- ①  $x = -3$  で極大値をとる。
- ②  $x = -\sqrt{3}$  で極大値をとる。
- ③  $x = 0$  で極大値をとる。
- ④  $x = \sqrt{3}$  で極大値をとる。
- ⑤  $x = 3$  で極大値をとる。

(3) 変曲点について述べたものとして正しいものを 1 つ選びなさい。

回答番号:

- ① 点  $(-3, f(-3))$  は変曲点である。
- ② 点  $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$  は変曲点である。
- ③ 点  $(0, f(0))$  は変曲点である。
- ④ 点  $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$  は変曲点である。
- ⑤ 点  $(3, f(3))$  は変曲点である。



(4) 漸近線について述べたものとして誤っているものを1つ選びなさい。

回答番号:

- ①  $x = 1$  は漸近線である。
- ②  $x = -1$  は漸近線である。
- ③  $y = x$  は漸近線である。
- ④  $y = -x$  は漸近線である。

(5) グラフの凹凸について述べたものとして正しいものはどちらか。

回答番号:

- ① 区間  $-3 < x < -\sqrt{3}$  において上に凸である。
- ② 区間  $\sqrt{3} < x < 3$  において上に凸である。

問題7. [★不定積分] (配点 10) [ マーク番号  ~  ]

次の(1), (2)の不定積分を計算しなさい。ただし、 $C$ を積分定数とする。

(1)

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \text{  } - \frac{1}{3} \int \text{  } \, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \text{  } - \text{  } + C$$

(2)

※  $t = \tan \frac{x}{2}$ とおきかえて積分をすること。

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} \, dx = \int \text{  } \, dt$$

$$= \text{  } + C$$

★  ~  の選択肢 ★

- ① 0   ② 1   ③  $x$    ④  $x^2$    ⑤  $\frac{1}{4}x^2$    ⑥  $\frac{1}{6}x^2$    ⑦  $x^3$    ⑧  $\frac{1}{6}x^3$    ⑨  $\frac{1}{9}x^3$
- ⑩  $\log x$    ⑪⑫  $x \log x$    ⑬⑭  $e^x$    ⑮⑯  $xe^x$

★  の選択肢 ★

- ① 0   ②  $\frac{1}{1+t}$    ③  $\frac{t}{1+t}$    ④  $\frac{2t}{1+2t}$    ⑤  $\frac{1}{1+t^2}$
- ⑥  $\frac{t}{1+t^2}$    ⑦  $\frac{2t}{1+t^2}$    ⑧  $\frac{t^2}{1+t^2}$    ⑨  $\frac{1-t^2}{1+t^2}$

★  の選択肢 ★

- ①  $\tan \frac{x}{2}$    ②  $1 + \tan \frac{x}{2}$    ③  $1 - \tan \frac{x}{2}$
- ④  $2 \tan \frac{x}{2}$    ⑤  $2 \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)$    ⑥  $2 \left(1 - \tan \frac{x}{2}\right)$
- ⑦  $\log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$    ⑧  $\log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right|$    ⑨  $\log \left| 1 - \tan \frac{x}{2} \right|$
- ⑩  $2 \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$    ⑪⑫  $2 \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right|$    ⑬⑭  $2 \log \left| 1 - \tan \frac{x}{2} \right|$

問題 8. [★定積分] (配点 10) [ マーク番号 30 ~ 32 ]

次の(1)~(3)の定積分を計算しなさい。

(1)

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{9}{x^2 + 9} dx = \boxed{30}$$

(2)

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \boxed{31}$$

(3)

$$\int_0^1 \frac{2x + 6}{2x^2 - 3x - 2} dx = \boxed{32}$$

★ 30 の選択肢 ★

- ①  $\frac{\pi}{18}$    ②  $\frac{\pi}{12}$    ③  $\frac{\pi}{9}$    ④  $\frac{\pi}{6}$    ⑤  $\frac{\pi}{4}$    ⑥  $\frac{\pi}{3}$    ⑦  $\frac{\pi}{2}$    ⑧  $\frac{3}{4}\pi$    ⑨  $\pi$    ⑩  $2\pi$

★ 31 の選択肢 ★

- ① 0   ②  $\pi$    ③  $2\pi$    ④  $-\pi$    ⑤  $-2\pi$   
 ⑥  $\pi^2$    ⑦  $\pi^2 + 2$    ⑧  $\pi^2 + 4$    ⑨  $\pi^2 - 2$    ⑩  $\pi^2 - 4$

★ 32 の選択肢 ★

- ① 0   ②  $\log 2$    ③  $\log 3$    ④  $-\log 2$    ⑤  $-\log 3$   
 ⑥  $\log 2 + \log 3$    ⑦  $\log 2 - \log 3$    ⑧  $-\log 2 + \log 3$    ⑨  $-\log 2 - \log 3$   
 ⑩  $\log 2 + 2\log 3$    ⑪ ②  $\log 2 - 2\log 3$   
 ⑫ ③  $-\log 2 + 2\log 3$    ⑬ ④  $-\log 2 - 2\log 3$   
 ⑭ ⑤  $2\log 2 + \log 3$    ⑮ ⑥  $2\log 2 - \log 3$   
 ⑯ ⑦  $-2\log 2 + \log 3$    ⑰ ⑧  $-2\log 2 - \log 3$   
 ⑱ ⑨  $2\log 2 + 2\log 3$    ⑲ ⑩  $2\log 2 - 2\log 3$   
 ⑳ ④  $-2\log 2 + 2\log 3$    ㉑ ⑤  $-2\log 2 - 2\log 3$

問題9. [★曲線の長さ] (配点 10) [マーク番号 33 ~ 37]

つぎの媒介変数表示にて表される曲線

$$\begin{cases} x = \cos t (1 + \cos t) \\ y = \sin t (1 + \cos t) \end{cases}, \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

について(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 導関数を計算しなさい。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\boxed{33}}{\boxed{34}}$$

(2) 曲線の長さ  $L$  を求めなさい。

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{\boxed{35}} dt \\ &= \int_0^\pi \boxed{36} dt \\ &= \boxed{37} \end{aligned}$$

★ 33 ・ 34 の選択肢 ★

- ①  $\sin t + \sin 2t$     ②  $\sin t + 2 \sin 2t$     ③  $\sin t + 4 \sin 2t$   
 ④  $\sin t + \cos 2t$     ⑤  $\sin t + 2 \cos 2t$     ⑥  $\sin t + 4 \cos 2t$   
 ⑦  $\cos t + \sin 2t$     ⑧  $\cos t + 2 \sin 2t$     ⑨  $\cos t + 4 \sin 2t$   
 ⑩  $\cos t + \cos 2t$     ⑪⑫  $\cos t + 2 \cos 2t$     ⑬⑭  $\cos t + 4 \cos 2t$

★ 35 の選択肢 ★

- ①  $\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)$     ②  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$     ③  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

★ 36 の選択肢 ★

- ①  $2 \sin \frac{t}{2}$     ②  $4 \sin \frac{t}{2}$     ③  $8 \sin \frac{t}{2}$     ④  $2 \cos \frac{t}{2}$     ⑤  $4 \cos \frac{t}{2}$     ⑥  $8 \cos \frac{t}{2}$   
 ⑦  $2 \sin 2t$     ⑧  $4 \sin 2t$     ⑨  $8 \sin 2t$     ⑩  $2 \cos 2t$     ⑪⑫  $4 \cos 2t$     ⑬⑭  $8 \cos 2t$

★ 37 の選択肢 ★

- ① 0    ② 1    ③ 2    ④ 3    ⑤ 4    ⑥ 6    ⑦ 8  
 ⑧  $\pi$     ⑨  $2\pi$     ⑩  $3\pi$     ⑪⑫  $4\pi$     ⑬⑭  $6\pi$     ⑮⑯  $8\pi$

問題 10. [広義積分] (配点 10) [マーク番号  ~  ]

次の(1), (2)の広義積分を計算しなさい。

※今回はマークシート式での出題ですが、必ず記述形式の答案作成に慣れておくこと！！

(1)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \boxed{38}$$

$$= \boxed{39}$$

(2)

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} dx = \boxed{40}$$

★  の選択肢 ★

$$\textcircled{0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \textcircled{1} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\varepsilon}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\textcircled{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1+\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \textcircled{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

★  ・  の選択肢 ★

$$\textcircled{0} 0 \quad \textcircled{1} 1 \quad \textcircled{2} 2 \quad \textcircled{3} 3 \quad \textcircled{4} 4 \quad \textcircled{5} \frac{1}{2} \quad \textcircled{6} \frac{1}{3} \quad \textcircled{7} \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{8} \frac{\pi}{6} \quad \textcircled{9} \frac{\pi}{4} \quad \textcircled{10} \frac{\pi}{3} \quad \textcircled{11} \frac{\pi}{2} \quad \textcircled{12} \pi \quad \textcircled{13} \infty \quad \textcircled{14} -\infty$$

問題は以上です。お疲れさまでした！

期末試験も頑張りましょう！