皆さんは解析・線形代数・確率のどれが好きですか？　ちなみに私は確率派です。

学科	
学生番号	

20XX 年度

第４回　全島統一うさぎテスト

解析学・後編　フォーム問題

（50 分・50 点）

★注意事項　解く前に絶対見てね！★

１．この問題冊子にはフォーム用の問題が記述されている。制限時間は 50 分となっているが目安なので気にしないでよいが記述問題を含めた時間配分を考えること。なお、制限時間はフォーム問題・記述問題合わせて 100 分である。

２．フォーム問題の解答はすべて Google フォームに入力すること。マークシート問題の満点は 50 点。

３．本冊子に誤字・脱字・意味不明な日本語及び問題用紙の汚れ等があった場合、**速やかに問題作成主 (@momousa787) にメッセージを送っていただけると助かります。**

４．フォーム問題は第１問〜第５問があり、すべての問題が必答問題である。

５．フォームの解答番号は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{34}$ である。

６．記述用の問題は別に用意されている。なお、記述用の問題の解答用紙は別紙の記述用解答用紙に記入すること。

７．この模試は、おもに２変数の微分・積分についての知識を確認するための模試である。具体的にはうさぎ塾の「解析」分野の Part12〜Part27 が試験範囲である。

８．試験終了後、問題は持ち帰ってよい。

フォーム問題　解答時の注意点

1．フォーム編のすべての問題は Google フォームで回答します。

2．記述編の問題は別冊子にあるので忘れないようにしましょう。

3．Google フォームの最初のページで情報を入れてください。

4．指示がない限り、解答は指定された選択肢の中から最も適切なものを 1 つ入力すること。ただし**選択の際に 2 つの記号・数字を入力する問題がある**ので注意すること。

例 1．式が正しくなるようにしなさい。 3 − $\boxed{10}$ = 4

★ $\boxed{10}$ の解答群 ★				
⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	①① −1	①② −2	①③ −3	①④ −4

↑ 正しい選択肢は①①なので、フォームには 11 と回答。

※ ちょっと式に違和感がありますが、式を穴埋めする問題では、3 − ($\boxed{10}$) = 4 のように穴埋めの前後に括弧が入っていると思ってください。

例 2. $\boxed{14}$ に当てはまる数字をマークしなさい。 2 - 4 = $\boxed{14}$

↑ 答えは -2 なので -2 をマーク

※ 指示がある場合は指示に従うこと。

5．すべての問題が解き終わりましたら、必ず「送信」ボタンを押してください。

6．フォーム部分が 50 点、記述部分が 50 点です。記述部分は部分点が設定されているかもしれないので諦めずに回答しましょう。

7．では頑張ってください！　マークミスには気をつけて！

フォーム部分は提出後、スコアがすぐに表示されます。

数学の注意点

1. $\log x$ は x の自然対数、つまり $\log_e x$ を表す。（$\ln x$ と表されることもある。）

2. $\sin^{-1} x$，$\cos^{-1} x$，$\tan^{-1} x$ はそれぞれ $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を表す。

（$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ と表されることもある。）

3. 問題文上で、偏微分を以下の記号で表すことがある。

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

問題１. [小問集合] マーク番号 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{10}$

つぎの(1)～(7)の問いに答えなさい。（配点　10）

(1) つぎの２変数関数の極限を計算したい。(i)～(iv)の問いに答えなさい。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+3y^2}$$

(i) 次の２つの極限を計算したときの結果を a, b とする。

$$a = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{2x^4+3y^2}\right), \qquad b = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{2x^4+3y^2}\right)$$

このとき、a, b に成り立つ関係として正しいものを選択肢から選び、$\boxed{1}$ にマークしなさい。

★ $\boxed{1}$ の解答群 ★
⓪ $a = b$　　① $a \neq b$　　② a は収束するが b は発散する
③ a は発散するが b は収束する　　④ a も b も発散する

(ii) 点 (x, y) を直線 $y = mx^2$ に沿って原点 $(0,0)$ に近づける。

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^2y}{2x^4+3y^2} = \boxed{2}$$

このときの極限値を m を用いて表し、正しいものを選択肢から選び、$\boxed{2}$ にマークしなさい。

★ $\boxed{2}$ の解答群 ★
⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{1}{3}$
⑥ $\frac{1}{2m^2+3}$　⑦ $\frac{1}{3m^2+2}$　⑧ $\frac{m}{2m^2+3}$　⑨ $\frac{m}{3m^2+2}$

(iii) つぎの 2 変数関数の極限値

$$c = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4 + 3y^2}$$

に関する文章の空欄 (ア)、(イ) を正しく埋める選択肢の組み合わせとして正しいものを 1 つ選び、 **3** にマークしなさい。

(ア) から、極限値 c は (イ)。

★ **3** の解答群★

選択肢	ア	イ
⓪	1 が成立する	存在する
①	1 が成立する	存在しない
②	2 が存在し、m の値に関わらず一定だ	存在する
③	2 が存在するが、m の値に依存する	存在しない

(iv)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{2x^4 + 3y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は原点 $(0,0)$ において連続であるか。解答群の中から正しいものを 1 つ選び、 **4** にマークしなさい。

★ **4** の解答群 ★

⓪ $f(x,y)$ は原点において連続である

① $f(x,y)$ は原点において連続でない

② $f(x,y)$ は原点において連続かどうかはわからない

(2) ２変数関数 $f(x,y)$ が C_2 級関数であるとき、 $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ。つまり偏微分の順序を入れ替えても計算結果が変わらない。ここで、C_2 級関数とはどんな関数か。正しいものを１つ選び、マーク番号 $\boxed{5}$ にマークしなさい。

★ $\boxed{5}$ の解答群 ★

⓪　１回偏微分可能な関数　①　２回偏微分可能な関数　②　３回偏微分可能な関数

③　１次以下の導関数がすべて連続な関数

④　２次以下の導関数がすべて連続な関数

⑤　３次以下の導関数がすべて連続な関数

⑥　１回偏微分可能な関数かつ１次以下の導関数がすべて連続な関数

⑦　２回偏微分可能な関数かつ２次以下の導関数がすべて連続な関数

⑧　３回偏微分可能な関数かつ３次以下の導関数がすべて連続な関数

(3) 関数 $f(x,y)$ を全微分した結果 df として正しい式を選び、マーク番号 $\boxed{6}$ にマークしなさい。

★ $\boxed{6}$ の解答群 ★

⓪ $df = f(x,y)\,dx + f(x,y)\,dy$　① $df = f(x,y)\,dx - f(x,y)\,dy$

② $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$　③ $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy$

④ $df = \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$　⑤ $df = \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy$

⑥ $df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$　⑦ $df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$

⑧ $df = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy$　⑨ $df = \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy$

(4) つぎの(i), (ii)の問いに答えなさい。

(i) 2 変数関数 $f(x,y)$ がある点 (a,b) において極大値を持つとする。このときに必ず成立する関係式として正しいものを 2 つ選び、マーク番号 $\boxed{7}$ にマークしなさい。ただし、行列 X を

$$X = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

とする。

(ii) また、この行列式 $|X|$ は $\boxed{8}$ と呼ばれる。$\boxed{8}$ に当てはまる語句として正しいものを 1 つ選び、マーク番号 $\boxed{8}$ にマークしなさい。

★ $\boxed{7}$ の解答群 ★

⓪ $X > 0$　① $X = 0$　② $X < 0$

③ $f_{xx}(a,b) > 0$　④ $f_{xx}(a,b) = 0$　⑤ $f_{xx}(a,b) < 0$

⑥ $f_{xy}(a,b) > 0$　⑦ $f_{xy}(a,b) = 0$　⑧ $f_{xy}(a,b) < 0$

★ $\boxed{8}$ の解答群 ★

⓪ ラグランジュ　① ヤコビアン　② エイリアン　③ ラプラシアン

④ ポメラニアン　⑤ ヘッシアン　⑥ インディアン　⑦ マクローリン

⑧ ラジアン　⑨ タクアン　①② ジャイアン

(6) つぎの陰関数に関する文章の空欄（ ア ）、（ イ ）を正しく埋める選択肢の組み合わせとして正しいものを１つ選び、 $\boxed{\ 9\ }$ にマークしなさい。

陰関数で与えられた方程式 $f(x,y)=0$ からなる関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ が存在するための条件は（ ア ）である。また、（ ア ）を満たすとき、導関数 $\frac{dy}{dx}$ は（ イ ）で求めることができる。

★ $\boxed{\ 9\ }$ の解答群★

選択肢	ア	イ	選択肢	ア	イ
⓪	$f_x \neq 0$	$\frac{f_x}{f_y}$	④	$f_x \neq 0$	$\frac{f_y}{f_x}$
①	$f_y \neq 0$	$\frac{f_x}{f_y}$	⑤	$f_y \neq 0$	$\frac{f_y}{f_x}$
②	$f_x \neq 0$	$-\frac{f_x}{f_y}$	⑥	$f_x \neq 0$	$-\frac{f_y}{f_x}$
③	$f_y \neq 0$	$-\frac{f_x}{f_y}$	⑦	$f_y \neq 0$	$-\frac{f_y}{f_x}$

(7) ある関数の２重積分を求めるために $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ と変数変換を行った。このときのヤコビ行列式の値として正しいものを $\boxed{\ 10\ }$ にマークしなさい。

★ $\boxed{\ 10\ }$ の解答群 ★
⓪ 0　① ab　② a^2b^2　③ abr　④ abr^2
⑤ abr^3　⑥ a^2b^2r　⑦ $a^2b^2r^2$　⑧ $a^2b^2r^3$

問題２. [偏微分] マーク番号 $\boxed{11}$ ～ $\boxed{19}$

偏微分に関する問題について、(1)～(3) の問いに答えなさい。(配点　11)

(1) 次の $\boxed{11}$ ～ $\boxed{14}$ に当てはまる答えを下の解答群から選び、マークしなさい。

２変数関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ を考える。（ただし $(x,y)\neq(0,0)$ ）
このときの偏導関数は、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\boxed{11},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\boxed{12}$$

となる。また、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\boxed{13}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\boxed{14}$$

と計算できる。

★ $\boxed{11}$ ～ $\boxed{14}$ の解答群 ★

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{x^2+y^2}$　③ $\dfrac{2}{x^2+y^2}$　④ $\dfrac{2x}{x^2+y^2}$　⑤ $\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

⑥ $\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$　⑦ $\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$　⑧ $\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$　⑨ $\dfrac{-4xy}{x^2+y^2}$

①② $\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$　①③ $\dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$　①④ $\dfrac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$　①⑤ $\dfrac{2(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$

①⑥ $\dfrac{2(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}$　①⑦ $\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$　①⑧ $\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

(2) 次の $\boxed{15}$ ～ $\boxed{17}$ に当てはまる数字をマークしなさい。ただし、当てはまる数字は-9 以上 9 以下である。

t について 2 回微分可能な関数 $f(t)$ 、および 2 変数関数 $g(x, y) = f(2x - 4y)$ がある。
このとき、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \boxed{15}\, f'(2x - 4y), \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \boxed{16}\, f'(2x - 4y)$$

である。また、

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \boxed{17}\, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

も成立する。

(3) 次の $\boxed{18}$ ～ $\boxed{19}$ に当てはまる答えを下の解答群から選び、マークしなさい。

u, v について 1 回微分可能な 2 変数関数 $f(u, v)$ 、および 2 変数関数 $g(x, y) = f(x + 2y, xy)$ がある。
ここで、$u = x + 2y, v = xy$ とおくと、以下の数式が成立する。

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \boxed{18}\, \frac{\partial f}{\partial u}(x + 2y, xy) + \boxed{19}\, \frac{\partial f}{\partial v}(x + 2y, xy)$$

★ $\boxed{18}$ ～ $\boxed{19}$ の解答群 ★

⓪ 0　① 1　② 2　③ x　④ y
⑤ $x + y$　⑥ xy　⑦ $2x + 2y$　⑧ $2xy$

問題３. ［２変数マクローリン展開・接平面］　マーク番号 $\boxed{20}$ ～ $\boxed{28}$

つぎの(1), (2)の問いに答えなさい。（配点　10）

(1) 次の $\boxed{20}$ ～ $\boxed{24}$ に当てはまる数字をマークしなさい。ただし、当てはまる数字は-9 以上 9 以下である。

２変数関数

$$f(x,y)=\frac{1}{1+x-y}$$

を２次の項までマクローリン展開すると、

$$f(x,y)=1+\boxed{20}\,x+\boxed{21}\,y+\boxed{22}\,x^2+\boxed{23}\,xy+\boxed{24}\,y^2$$

となる。

(2) 次の $\boxed{25}$ ～ $\boxed{28}$ に当てはまる答えを下の解答群から選び、マークしなさい。

次の 2 変数関数

$$z=f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

の $f(1,1)$ における接平面の方程式を求めたい。

$$f(1,1)=\boxed{25}$$

なので、接平面の方程式は、

$$z=\boxed{26}\,x+\boxed{27}\,y+\boxed{25}+\boxed{28}$$

となる。

★ $\boxed{25}$ ～ $\boxed{28}$ の解答群 ★

⓪ 0　① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{1}{6}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\frac{1}{2}$　①② $-\frac{1}{3}$　①③ $-\frac{1}{4}$　①④ $-\frac{1}{6}$

①⑤ $\frac{\pi}{2}$　①⑥ $\frac{\pi}{3}$　①⑦ $\frac{\pi}{4}$　①⑧ $\frac{\pi}{6}$

①⑨ $-\frac{\pi}{2}$　②③ $-\frac{\pi}{3}$　②④ $-\frac{\pi}{4}$　②⑤ $-\frac{\pi}{6}$

問題４． ［２重積分］ マーク番号 $\boxed{29}$ ～ $\boxed{32}$

次の $\boxed{29}$ ～ $\boxed{32}$ に当てはまる選択肢として正しいものをそれぞれの解答群の中から選びなさい。（配点　10）

２重積分

$$\iint_D xe^{y^2}\,dxdy$$

$$D=\{(x,y)|\,0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 1\}$$

の値を求める。積分範囲 D を変更すると、

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq y\leqq 1,\ \boxed{29}\leqq x\leqq\boxed{30}\right\}$$

となる。よって

$$\iint_D xe^{y^2}\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{\boxed{29}}^{\boxed{30}} xe^{y^2}\,dx\right)dy=\int_0^1\boxed{31}\,dy=\boxed{32}$$

と積分を計算することができる。

★ $\boxed{29}$ ～ $\boxed{30}$ の解答群 ★

⓪ 0　① 1　② y　③ y^2　④ $\sqrt{y}$

★ $\boxed{31}$ の解答群 ★

⓪ e^{y^2}　① $\frac{1}{2}e^{y^2}$　② ye^{y^2}　③ $\frac{y}{2}e^{y^2}$　④ $y^2e^{y^2}$

⑤ $\frac{y^2}{2}e^{y^2}$　⑥ $y^4e^{y^2}$　⑦ $\frac{y^4}{4}e^{y^2}$

★ $\boxed{32}$ の解答群 ★

⓪ $\frac{e-2}{2}$　① $\frac{e-2}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{e-1}{2}$　④ 1　⑤ $\frac{e-1}{4}$　⑥ $\frac{e}{4}$　⑦ $\frac{e}{2}$　⑧ e

問題５． [2 重積分の応用]　マーク番号 $\boxed{33}$ ～ $\boxed{35}$

次の $\boxed{33}$ ～ $\boxed{35}$ に当てはまる選択肢として正しいものをそれぞれの解答群の中から選びなさい。（配点　9）

放物面 $z = x^2 + y^2$ のうち、２つの平面 $z = 0,\ z = 1$ にある部分の曲面積を求めたい。
$z = f(x, y)$ とすると、曲面積は、

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy, \qquad D = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

で求めることができる。
ここで、$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とすると範囲を

$$D' = \left\{(x, y) \middle| \boxed{33} \right\}$$

と変換することができる。よって、

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \iint_{D'} \boxed{34}\, drd\theta = \boxed{35}$$

と計算できる。

★ $\boxed{33}$ の解答群 ★

⓪ $0 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$　① $0 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

② $-1 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$　③ $-1 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

★ $\boxed{34}$ の解答群 ★

⓪ $\sqrt{1+r}$　① $\sqrt{1+r^2}$　② $\sqrt{1+4r}$　③ $\sqrt{1+4r^2}$

④ $r\sqrt{1+r}$　⑤ $r\sqrt{1+r^2}$　⑥ $r\sqrt{1+4r}$　⑦ $r\sqrt{1+4r^2}$

★ $\boxed{35}$ の解答群 ★

⓪ $\frac{1}{12}(2\sqrt{2}-1)\pi$　① $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)\pi$　② $\frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)\pi$　③ $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\pi$

④ $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi$　⑤ $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)\pi$　⑥ $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi$　⑦ $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)\pi$

フォーム部分の問題は以上です。記述問題も頑張りましょう。