フォームの解答はこちらから↓↓↓↓

20XX 年度

第４回　全島統一うさぎテスト

グラフ理論（離散数学・後編）

［90 分 / 100 点］

試験が始まるまで、以下の注意事項、次のページの解答上の注意を読みなさい。

［注意事項］

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙を開かないこと。

2. 試験監督はいない。**自分自身が解答者とともに監督となる**のだ。必要なら友達や恋人を監督にしてもよい。

3. 問題用紙は、表紙を入れて全部で **12 ページ**である。

4. 問題 1～問題 3 はフォームに回答する問題、問題 4～問題 8 は記述で回答する問題である。

5. 試験開始前にフォームに「名前」などを入力すること。名前はペンネームでよいが、**解答問い合わせの際に必須**なので必ず自分自身で控えておくこと。

6. 問題 1～問題 8 まですべて必答問題です。

7. 万が一、誤字が発見された場合、問題作成主に報告してくれたら幸いです。

8. 解説は「工業大学生ももやまのうさぎ塾」の記事内にあるので、解き終わったら復習用にご覧いただけたら幸いです。今回は知識編（問題 1～問題 3）と、実践編（問題 4～問題 8）に分けております。

9. グラフ理論は、特に暗記が多い科目なので最悪前日に暗記するとかでもなんとかなるかもしれませんが、良い子のみんなは徹夜しないように！！

［**フォーム解答における注意**］

1. 最初のページで、受験者登録をすること。ここまでは試験開始前に行ってよい。

2. 指示がない限り、解答は指定された選択肢の中から最も適切なものを 1 つ入力すること。また、選択肢がない場合は答えとなる数値を**半角で**入力すること。

例 1. パンはパンでも食べられないパンはなーんだ。

① ジャムパン　② アンパン　③ メロンパン　④ フライパン

↑ 正しい選択肢は④なので、フォームには④と回答。

例 2. Perfume は何人組の団体？

↑ 答えは 3 人なので、フォームには 3 と回答。

3. フォームの解答用紙は 1 ページ目右上の QR コードにあります。

［**数学上における注意**］

1. グラフはすべて連結かつ単純であるものとする。

2. 平面的グラフのことを平面グラフと呼ぶこともある。

問題 1.［正誤判定］（配点　8）［フォーム問題］

次の(1)〜(8)それぞれにある[X], [Y]の文章について、その正誤の組み合わせとして正しいものを下の選択肢①〜④から 1 つ選びなさい。

(1)［X］次数を合計が奇数になるグラフがある。
　［Y］あるグラフの最大次数と最小次数が等しいならば、それは完全グラフである。
(2)［X］点の数と辺の数が共に等しい 2 つのグラフは、互いに同型である。
　［Y］あるグラフとその補グラフが同型になることがある。
(3)［X］点の数と辺の数が等しい完全グラフが存在する。
　［Y］オイラーグラフでかつハミルトングラフであるようなグラフは存在しない。
(4)［X］点数と辺数が等しい木がある。
　［Y］木は必ず 2 部グラフとなる。
(5)［X］点数が 5 の互いに同型ではない木は全部で 3 個ある。
　［Y］根付き木のある頂点 u の親を v とすると、v は u の先祖であるといえる。
(6)［X］オイラーグラフは必ず橋を持たない。
　［Y］閉路は回路の部分集合である。（閉路は回路の一種である。）
(7)［X］最大マッチングと完全マッチングが同じになることがある。
　［Y］完全グラフは必ず完全マッチングを持つ。
(8)［X］完全グラフの彩色数はグラフの点の数に等しい。
　［Y］2 部グラフの彩色指数は必ず 2 である。

★選択肢★

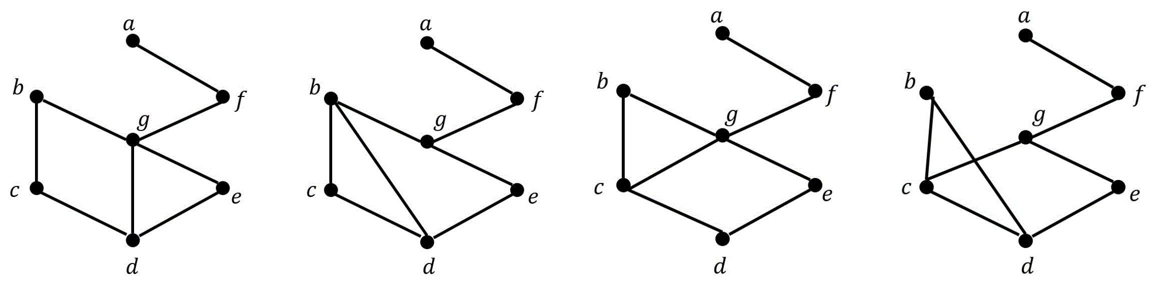
①［X］正［Y］正　②［X］正［Y］誤
③［X］誤［Y］正　④［X］誤［Y］誤

問題２．［グラフの基礎 1］（配点　10）［フォーム問題］

つぎの点集合 V 、辺集号 E で表されるグラフがある。

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}, \qquad E = \{(a, f), (b, c), (b, g), (c, d), (d, e), (d, g), (e, g). (f, g)\}$$

（1）グラフ G を描画したものはどれか。番号で答えなさい。



①　　②　　③　　④

（2）グラフ G の頂点数と辺数を答えなさい。

（3）グラフ G の最大次数と最小次数を答えなさい。

（4）始点が点 c 、終点が点 f までの歩道のうち、長さが最も大きくなる小道を求め、その長さを答えなさい。（長さのみを答えれば OK）

（5）グラフ G のカット点、および橋をすべて答えなさい。答えは、下の選択肢の番号で答えること。

★(5)カット点の選択肢★

① a　② b　③ c　④ d　⑤ e　⑥ f　⑦ g　⑧ なし

★(5)橋の選択肢★

① (a, f)　② (b, c)　③ (b, g)　④ (c, d)

⑤ (d, e)　⑥ (d, g)　⑦ (e, g)　⑧ (f, g)　⑨ なし

問題３．［グラフの基礎 2］（配点　12）［フォーム問題］

次の①～⑧のグラフについて、(1)～(6)に当てはまるグラフをすべて選びなさい。ただし、当てはまるグラフがない場合は⑨と答えること。

（1）隣接行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で表されるグラフと同型なグラフ

（2）完全グラフ

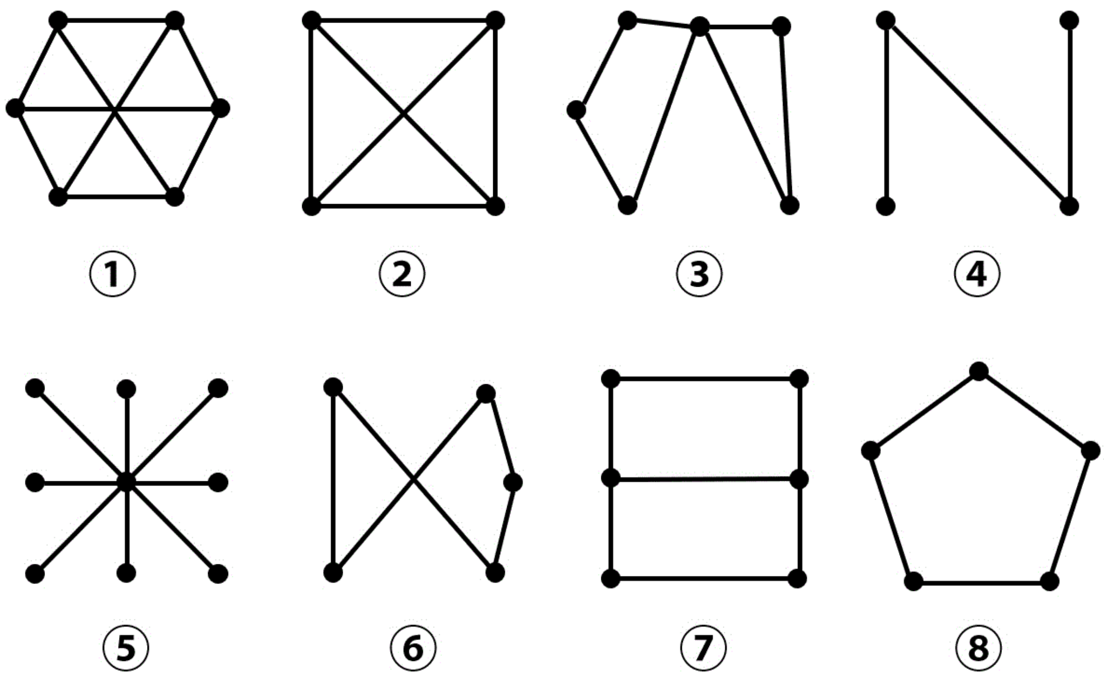
（3）3 次の正則グラフ

（4）ハミルトングラフではないグラフ

（5）互いに同型な 1 組のグラフ

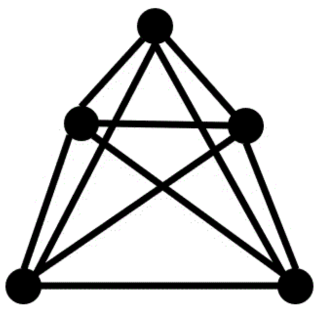
（6）彩色数が 2 のグラフ

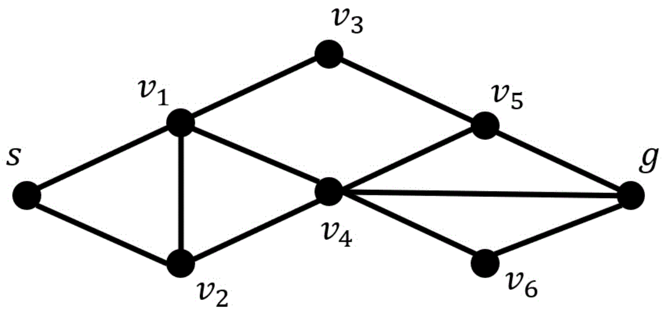
★グラフ一覧★



問題4．［中間集合］（配点　12）［記述問題］

次のグラフ G_1, G_2 について、(1)と(2)の問いに答えなさい。





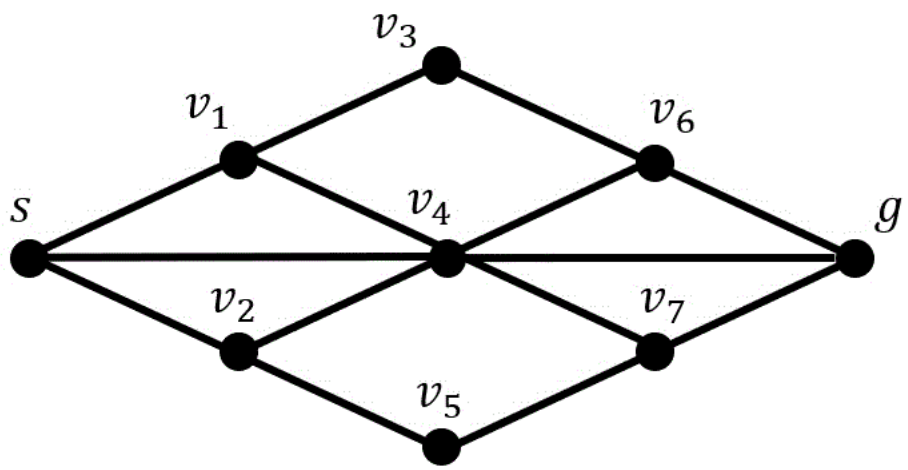
G_1　　　　　　　　　　G_2

（1）グラフ G_1 は平面的グラフか、理由と共に答えなさい。

（2）グラフ G_2 の $s-g$ 間の最小分離集合を理由と共に答えなさい。

問題５．［オイラーグラフとハミルトングラフ］（配点　12）［記述問題］

ヒビキくんとアキさんは下のようなグラフ G で表される地域に住んでいる。



ここで、それぞれのグラフの頂点は街を表し、辺は街に行くための道路を表している。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 今日散歩する道について、ヒビキくんとアキさんが会話をしている。

アキ：	ヒビキくん、もしよかったら一緒に散歩しない？
ヒビキ：	いいね！　今日はどの道を散歩する？
アキ：	うーん、じゃあ１回通った街を２回以上通らないように地域全部の街を回るルートで散歩がしたいんだけど、そんなルートはあると思う？
ヒビキ：	なるほど、つまりグラフ G がハミルトングラフになるかどうか確認すればいいってことね！

問題：グラフ G はハミルトングラフか。理由も合わせて答えなさい。

(2) 散歩後、ヒビキくんとアキさんがまた会話をしている。

アキ：	散歩楽しかったね！
ヒビキ：	うん！
アキ：	ねぇ、明日は 1 回通った道路を 2 回以上通らないように地域全部の道路を回るルートで散歩がしたいな！
ヒビキ：	ってことは、グラフ G がオイラーグラフになるかどうか確認すればいいのね。でも、もうぽれ[*1]疲れたよ～。明日は休ませて…。
アキ：	そうそう！　でも 2 日連続散歩するのはちょっとしんどいわね。明日は一緒にゲームしよっか！
ヒビキ：	おけおけ！[*2]

問題：グラフ G はオイラーグラフか。理由も合わせて答えなさい。

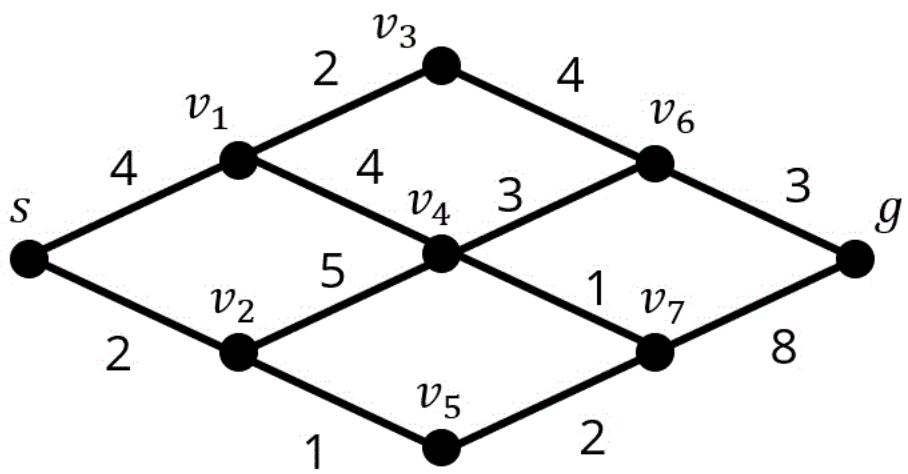
［注釈］

*1 ぽれ … 1 人称

*2 おけおけ！ … 賛同を表している。OK とほぼ同じ。

問題６．［最短経路問題と最小全域木］（配点　16）［記述問題］

ヒビキ家の住民は、下のようなグラフ G で表される地域の街 s に住んでいる。



ここで、それぞれのグラフの頂点は街を表し、辺は街に行くための道路を表している。また、それぞれの辺の数字は距離[km]を表している。

(1）ヒビキとその母親が夕食後、会話をしている。

ヒビキ母：	ねぇ、明日街 g に出張なんだけど、普段使っているルート[*3]が工事中なのよね。街 s から街 g までの最短距離ってどうやったらわかる？
ヒビキ：	それなら、ダイクストラ法で計算すればかんたんに計算できるかな。
ヒビキ母：	なるほど～。ちょっとヒビキ計算してみてよ。
ヒビキ：	えぇ、めんどくさいなぁ。(計算を始める）

問題. 街 s から街 g までの最短距離をダイクストラ法で計算しなさい。

（2）ヒビキとその父親が夕食後、会話をしている。

ヒビキ父：	今度この街に渋滞緩和のための有料道路を作ろうと思ってるだよね。
ヒビキ：	え？　本当に？　どことどこを結ぶの？
ヒビキ父：	この地域にある街を有料道路だけで行き来できるようにいろんな区間に建設するんだ[*4]。
ヒビキ：	まじか、それ予算すごくかからない？
ヒビキ父：	そうなんだよ。ちょっとヒビキ、どの街間に有料道路を設置すれば費用が一番安くなるか、計算できる？
ヒビキ：	グラフ G の最小全域木を計算すれば求まるけどさぁ…。

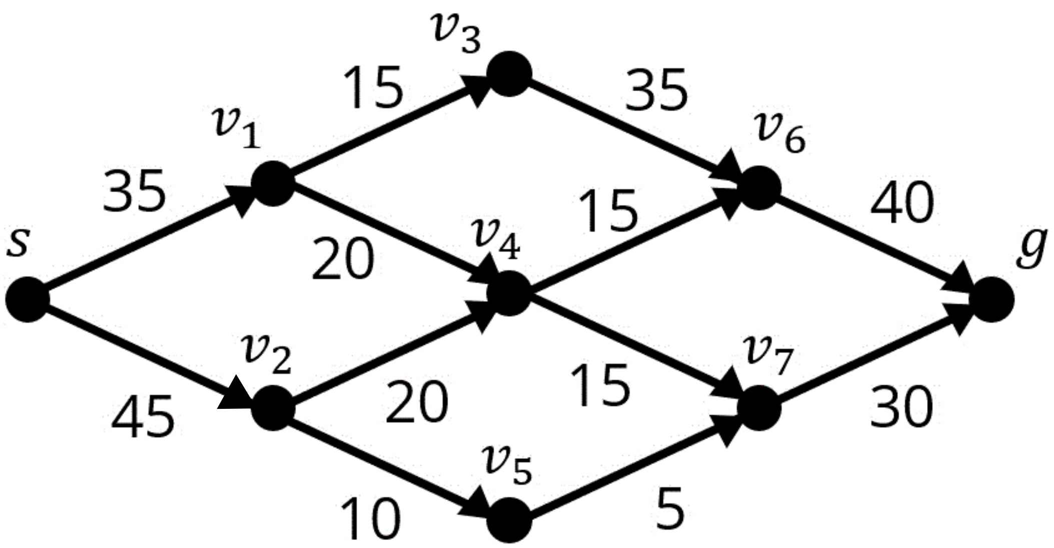
問題.　グラフ G の最小全域木を計算し、どの街間に有料道路を設置すれば費用が一番安くなるかを求めなさい。ただし、設置費用は 1km = 10 億円とする。

［注釈］

*3　普段使っているルート　…　$s \to v_4 \to g$ のこと。問題設定の都合上、今回は工事とさせていただきました。

*4　普通の家庭ではこんな話はしない。

問題７．［最大フローと最小カット］（配点　14）［記述問題］
ヒビキ達が住んでいる地域は、下のようなグラフ G で表される。



ここで、それぞれのグラフの頂点は街を表し、辺は街に行くための道路を表している。辺に書かれている数字は、1 時間あたりに移動できる人数の上限[×100 人]を表している。ここで、この地域では、年に 1 度、地域の誕生を祝う祭りが開かれる。その祭りの際に、街 s から街 g へ大量の人が移動する。そこで 1 時間あたりに街 s から街 g へ移動できる人数の限度を知りたい。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

（1）このグラフ G の最大フローを求めることで、1 時間あたりに街 s から街 g へ移動できる人数の限度を求めなさい。ただし、年に 1 度の祭りの際には交通規制が行われるため、人々は矢印の方向にしか進めないものとする[*5]。

（2）グラフ G の最小カット、および最小カットの容量を求めなさい。

［注釈］
*5 祭りのときによくある一方通行規制だと思ってください。

問題８．［マッチング］（配点　16）［記述問題］

ヒビキとその友達（リクオ、マツ、ノゾミ、ユメ、サキ）は肝試しをすることにした。そこで、肝試しを楽しんでもらうために、お互いに仲が良い人同士で組むことを考えたい。ここで、男性陣はヒビキ、リクオ、マツの３人、女性陣はノゾミ、ユメ、サキの３人である。

(1) まずは、男女考えずに２人組を作ることを考えた。事前に仲良しな人を調査した結果、６人の関係は下の表となった。次の(i), (ii)の問いに答えなさい。ここで、○がついている人同士がお互いに仲が良い人を表す。例えば、ヒビキとリクオは○がついているため、お互いに仲が良い。

リクオ	○				
マツ	○	○			
ノゾミ	○				
サキ	○	○		○	
ユメ	○	○			
	ヒビキ	リクオ	マツ	ノゾミ	サキ

(i)　人を点、仲良し関係を辺としたときの状態をグラフで書きなさい。

(ii) 互いに仲が良い人同士で組むことは可能か。理由と共に答えなさい。

(2) 次に男女ペアで２人組を作ることを考えた。事前に組んでもいい人を調査した結果、関係は下の表ようになった。（(1)と同じく、○がついている人同士が互いに仲が良い）

	ヒビキ	リクオ	マツ
ノゾミ	○		
サキ	○	○	
ユメ	○	○	

(i)　人を点、仲良し関係を辺としたときの状態をグラフで書きなさい。

(ii) 互いに仲が良い人同士で組むことは可能か。理由と共に答えなさい。

問題は以上です。期末試験も頑張りましょう！